Forsøg
til
at finde et Middel, hvorved Skibenes Krængninger og Svingningsbuer kunne maales i Søen.

Af

C. Hoyer.

At tydelig Kundskab om et Skibs Bevægelse i Søen er ei alene af Vigtighed for dem, som skulle bygge Skibene, men og for dem, der skulle føre samme over Søen, vil neppe kaldes i Tvivl af nogen. Lad endog hine deels ved Kundskaber a priori, deels ved Aarhundreders samlede Erfaring have erhvervet sig den til Vished fornødne Overbeviisning, det til Anvendelse fornødne Lys, saa vil dette ingenlunde kunde være Tilfældet for disse. Constructioner og Beregninger, der fordre nogle Aars Øvelse for at giøres med Lethed, kunde aldrig blive Søemandens Sag, om de endog ikke fordrede Data, dem han ei kan have. Det var derfor ønskeligt, at Søemanden kunde ved Skibet selv paa en let og sikker Maade finde det fornødne saavel til at kiende dets Egenskaber, som til at sammenligne det med andre Skibe. Ikkun derved bliver det let, at nytte de paa eet Skib giorte Erfaringer til et andet Skib, at meddele disse Kundskaber til andre eller og modtage dem fra andre.

Alle Skibets Bevægelser kunne, ligesom ethvert andet Legemes, henføres til Rotationsbevægelser omkring trende paa hinanden perpendiculare Axler, og til den fremgaaende Bevægelse. Denne, saavelsom Rotationsbevægelsen omkring vertikale Axler, fordrer til at kiendes kun Omhyggelighed og Kundskaber, hvori Søemanden almindelig er vel bevandret. Jeg skal derfor her sætte dem ud af Betragtning. Med Svingene omkring horizontale Axler, eller de saa kaldte Slingringer og Duninger, er det derimod anderledes beskaffen. De udgiøre fornemmelig Caracteren af et godt eller maadeligt Søeskib, og fortiente tilligemed Krængningen at kiendes nøiere end det hidindtil har vel været giørligt, formedelst Mangel paa Midler til at maale eller bestemme dem. At kunde angive et saadant Middel forekom mig derfor nyttigt, deels for den større Tydelighed i Kundsk—, Lethed at ordne og bevare samme, som det kunde forhielpe til, deels for den bestemtere og vissere Sammenligning af de kongelige Skibe i deres Beseilinger, som derved kunde erholdes, og endelig syntes mig man møder endnu saa megen Uvished i det Flydendes Bevægelseslove og Virkemaader, at ingen Vei, der kan føre til nøiere Kundskab derom, burde blive ubevandret. Jeg har derfor ikke fæstet Tanken alene til at maale Krængningerne, men tillige at kunde med nogenledes Vished finde Svingningsbuerne. Et Skibs Magelighed kan ei vel bedømmes alene af dets Svingningstider, men Vinklernes Størrelse, der i disse Tider giennemløbes, have og nogen Indflydelse. Fra disse Vinklers Sammenligning med hinanden for et og samme Skib tilligemed Svingningstiderne maae desuden saavel Bølgernes Virkning som de modstaaende Kræfters Indflydelse bedømmes. Afhandlingens fornemste Aarsag og Gienstand saaledes forudsat, gaaer jeg over til samme.

Dersom et krængende Skib laae stedse i nogen mærkelig Tid uden at forøge eller formindske dets Krængning, da vilde sikkerlig Loddet af alle Midler være det bedste til at maale den, fordi det var simplest og tilstrækkelig nøiagtig. Men Vindens Foranderlighed saavel i Direction som Styrke, Skibets egne Giringer fra dets Direction, og endelig Søens Bølger ere ligesaa mange Aarsager, der søge at give Skibet en større eller mindre Krængning end det i Følge de meer bestandig virkende Kræfter burde have. Forestilles Skibet ved een af disse Aarsager bragt til at forandre sin Krængning en vis

Bue,

Bue, da er det en fornøden Følge af de materielle Tings Natur, at det derved geraader i Svingning, hvilken ei kan standses ved Vandets og Luftens Modstand uden i en vis endelig Tid. En nye Aarsag tilveiebringer igien en nye Oscillation, og saaledes maae Skibet forestilles næsten idelig i Svingning. Virkningen deraf paa Loddet er naturlig, at det ogsaa svinger, og dette forskiellig under samme Svingninger af Skibet, eftersom Loddet er langt eller kort, og er ophængt fra forskiellige Steder i Skibet. Det følger altsaa, "at "Maalingen af Krængnings- og Svingningsvinklerne reducerer sig til, at "kunde ophænge en Linie saaledes, at den i ommeldte Skibets Bevægelser "forblev vertikal, om ei absolut, saa dog inden de Grændser, som den in-"tendeerte Nøiagtighed fordrer."

Lad (Fig. 1) C forestille et Skibs Tyngselspunct, AB dets Langaxel, DE Tveraxen, Perpendicularen giennem C paa Planet ADBE, dets tredie eller vertikale Axel. Det er da Svingningerne omkring AB jeg her og i det følgende betragter, forestillende indtil videre ingen anden at have Sted. Man antage en solid Stang LK (Fig 2) ophængt saaledes om en Axel giennem H, at den frielig kan svinge omkring samme, saa vil det have Sted:

1) Gaaer Axlen giennem Stangens egen Tyngselspunct, da vil Stangen stedse bevæges parallel med sig selv, Axlen bevæge sig efter hvilke Love man vil, og være fæstet i Skibet hvor man vil. Stangen vil altsaa forblive vertikal, naar den i Bevægelsens Begyndelse er det. Var end intet andet mod denne Ophængningsmaade, vilde det alene være nok, at man aldrig kunde være vis paa, om Stangen var vertikal eller ei, saasom den aldeles ingen egen Kraft vilde have til at søge denne Direction, men ligemeget forblive i enhver anden, som ukiendte Tilfælde kunde bringe den i. Det følger deraf at Stangens Tyngselspunct I bør stedse falde under Ophængningspunctet.

2) Som Axlen AB er i Hvile, skiøndt Skibet svinger omkring den, saa følger: at dersom Ophængningspunctet toges hvor man vil i denne Linie, da maatte Stangen stedse forblive vertikal, hvor stor end HI var. Men herved bør mærkes, deels at det ingen let Sag er, at angive den nøiagtige Situation af Linien AB i Skibet, deels at om endog denne antages givet, vilde dog Stangen ved slig Ophængningsmaade ofte geraade

i Sving-i Svingning, fordi skiøndt AB er i Hvile i de Svingninger jeg her fæster Tanken til, maae den dog ofte selv rotere omkring visse Centrer, medens den primitive Aarsag til Skibets Svingning varer.

Skiøndt Hensigten kan derfor ei paa nogen af disse Maader opnaaes, indsees det dog klart, at Stangens Afvigninger ville i Almindelighed blive saa meget mindre som H's Afstand fra Axlen AB og HI i selve Stangen ere smaa til. Det er altsaa og rimelig, at ved en tilbørlig Hensyn paa begge disse Størrelser maae kunde opnaaes hvad de ei særskildt kunne give. Jeg vil til den Ende betragte:

A. Lovene, en blot materiel Stang følger i sine Svingninger, naar Axlen, hvorom den er ophængt, selv svinger smaa Buer i et Plan. Den deraf følgende Indretning af en tung Stang og dens Ophængning, for paa det nærmeste at opnaae Hensigten.

B. Naar en Lov for Axlens Svingninger antages, da at bestemme en tung Stangs Bevægelser, der er ophængt fra samme.

A.

§. 1.

Lad Fig. 3 forestille et Plan perpendicular paa Langaxlen AB og skiærende samme i et Punct C. Stangens Axel staaer perpendicular paa samme Plan giennem H, omkring hvilken Stangen antages at kunde svinge frit. Punctet H forestilles at svinge omkring C, saa at dens Hastighed er o i G, størst i L, og atter o i M. Bevægelsen supponeres at begynde i G. Stangen FHK, dens Beliggenhed da H var i G, antages at være HQ parallel med PC, nu derimod giør den med samme en Vinkel ω. I Tiden T har H bevæget sig giennem GH; dens Vinkelgesvindighed i sidste Moment af $T = v$. N er Punctet af Stangen, til hvilket H er Stødets Center; $NH = D$.

I Stan-

I Stangens Tyngselspunct; $HI = r$. Hastigheden, Tyngden giver i første Secund, $= p = 30{,}2'$. Den halve Circumference af Cirklen, hvis Radius 1, $= \pi$. Buen $LG = LM$, i Grader $= \alpha$. $LH = \varphi$. $LP = B$. $\angle NHQ = \omega$. $CP = a$. $\frac{d\omega}{dT} = w$.

Lad Skibets Punct H i sidste Moment af T faae en Tilvæxt af Vinkelgesvindighed $= d.\upsilon$ efter Tangenten HR, saa er Tilvæxt af absolut Gesvindighed $= ad.\upsilon$, og denne er det klart at Stangens Punct H maae i samme Moment faae efter HR. Dette giver parallel med FK, $\text{Sin.}(B + \varphi + \omega)ad.\upsilon$, og perpendicular paa FK, $\text{Cos.}(B + \varphi + \omega)ad.\upsilon$.

Den parallele Hastighed have vi intet med at giøre, som den ingen Indflydelse kan have paa Stangens Afsvigning fra den havende Direction. Den perpendiculare er at ansee som en Kraft, der virker paa Stangen i H, og som den skal der complet modstaaes af Stangens Inertie, saa maae Stangen faae en Svingningshastighed omkring et Punct N, til hvilket H er Center af Stødet. Følgelig haves: $Dd.w = \text{Cos.}(B + \varphi + \omega)ad.\upsilon$.

Fra denne Æqvation følger at w er altid størst naar υ er det, altsaa naar $\varphi = 0$. Dernæst som $\text{Cos.}(B + \varphi + \omega)$ varierer kuns lidet, fordi saavel B som φ ere smaa i Tilfældene her haves i Syne, antager jeg den constant, saa at $a\,\text{Cos.}(B + \varphi + \omega) = \acute{a}$, og er da $Dw = \acute{a}\upsilon$

og $Dd.\omega = -\acute{a}d.\varphi$

$$D\omega = C - \acute{a}\varphi.$$

Men som $\omega = 0$, naar $\varphi = \alpha$, saa er $C = \acute{a}\alpha$, og $\omega = \frac{\acute{a}}{D}(\alpha - \varphi)$; w er altsaa med $\upsilon = 0$, naar $\varphi = -\alpha$, og største Værdie af ω er naar $\varphi = -\alpha$, da er $\omega = \frac{2\acute{a}}{D}\alpha = \acute{\omega}$. Naar H efterat være kommen i M oscillerer igien tilbage til G, da vil Stangen gaae tilbage mod sin første Situation, saa at ω bliver 0, naar H kommer i G.

§. 2.

Forestiller man sig en fuldkommen lige Stang ophængt fra et Punct h under C, saa at CH = Ch, da vil Afvigningsvinkelen ω for den blive den samme som for den anden, kuns med den Forandring, at Vinkelen, de angive med Linien HCh, vil i den første være ω større, i den anden ω mindre end den sande Inclinationsvinkel PCH. Tvende saadanne Stænger vilde altsaa angive Grændsen af Feilen, der kunde være i Maalet af Vinkelen PCH. I Hensigt til á, som antoges constant, bemærkes, at naar B ansees = 10 a 12°, α = 2 a 3°, saa har de de største Værdier de faae i de almindeligste Tilfælde. $\frac{a}{D}$ vil man let see kan forringes i det mindste til $\frac{1}{10}$. Nu findes Cos. 12° og Cos. 15° kun at skielle $\frac{1}{100}$ fra hinanden, følgelig vil Feilen i $\acute{\omega}$, ved at ansee á som constant, være mindre end $\frac{6^\circ}{1000}$ eller mindre end $\frac{1}{2}$ Minut. Til en saadan Nøiagtighed vil naturlig Vinkelen selv aldrig kunde observeres paa Instrumentet, og følgelig kan Variationen i á sikkert sættes ud af Betragtning.

§. 3.

Fra største Værdie af ω eller $\acute{\omega} = \frac{2\acute{a}}{D}\alpha$ sees at alting kommer an paa at giøre $\frac{\acute{a}}{D}$ saa liden muelig. Som dette nu for en Deel er i vor Magt, synes det en naturlig Slutning, at dersom det kunde skee til den Grad at $\frac{2\acute{a}}{D}\alpha$ blev i sig ubetydelig, da vilde Hensigten være opnaaet, Stangen maatte være tung eller ikke, fordi Tyngdens Virkning maatte befordre Hensigten ved at formindske ω. Tilstaaes denne Slutning indtil videre, saa bliver at mærke: at $\frac{\acute{a}}{D}$ giøres liden ved at D er stor mod á, men som denne igien er større eller mindre eftersom Beliggenheden af Skibets Tyngselspunct er nøie bekiendt til, saa er Fordringen fra denne Synspunct noget ubestemt. Men i Hensigt til Skibets

Sling-

Slingringer formedelst Bølgerne er det vigtigt at D i sig er saa stor muelig, fordi da er Svingets Center, følgelig og á ubekiendt. Fra denne Synspunct skal jeg altsaa ansee Sagen, tage á (hvor fornødent) bekiendt og = 1 Fod, og Spørgsmaalet bliver da her at bestemme Grændsen for D. Hovedconditionen dertil er: "at Stangen skal med en vis Nøiagtighed søge Vertikalen, "naar den hviler." Stangen kan ei ophænges uden at den maae lide Friction ved Bevægelsen omkring Hængepunctet; D kan ei blive stor under maadelige Længder af Stangen selv uden at r maae blive liden, og som den aftager voxer Frictionens Indflydelse. Luftens Modstand vil fordre at Stangen mod begge Ender fra Ophængningspunctet af bliver meget nær eensdannet. For nu at D under samme r blev størst, maatte Stangen bestaae af tvende pyramidalske Legemer, hvis smale Ender stødte sammen nær Ophængningspunctet. Men i Betragtning saavel af Luftens Modstand, som af at Stangens Hensigt nødvendig fordrer Svingningsaxlen bevægelig for et lidet Stykke op og ned i Stangen, skal jeg antage samme af prismatisk Form. Lad Fig. 4 forestille en saadan Stang; Gravitetscentret i I; Svingets Axel gaaer giennem H perpendicular paa Papirets Plan; den er fast i Stykket abcd, som bør være bevægelig for en Længde af nogle faa Linier mod F; Bevægelsen maae kunde skee fiint formedelst en Skrue, og Afstanden IH ved Noniusinddeling og Skruen selv kunde angives. Hensigten hermed er, at flere Stænger kunne indrettes til at give eens Grad af Nøiagtighed, og i al Henseende sammenlignes, saavelsom og den enkelte Stang indrettes efter Skibet, det skal bruges paa. Axlens Ender forestilles at hvile paa tvende Opstandere, fæstede i Skibet, eller og at ligge paa Frictionshiul.

§. 4.

Ideen om Stangen saaledes forudsat, lad dens Længde være A, Diameteren i Basen = b; ansees den da fuldkommen solid og cylindrisk, haves som bekiendt $D = r + \frac{\frac{1}{12}A^2 + \frac{1}{16}b^2}{r}$. Som nu r bliver af Fornødenhed liden, og b bør og saavidt muelig tages liden for at formindske Luftens Modstand, saa kan uden Feil antages $D = \frac{A^2}{12r}$, og kan altsaa Stangens Sectioner parallel med Basen gives den med Luftens Modstand bedst passende Form, uden at følgende derved forandres. Lad Radius i Svingningsaxlen giennem $H = q$, $\frac{\text{Pressio}}{\text{Frictio}} = n$, da er Vinkelen, som Stangen i Hvile giør med Vertikalen, $=$ Arc. Tang. $\left(\frac{q}{nr}\right) = \beta$ (see Tillægget). Styrken af Axlen er (alt for Resten lige) som $\frac{q^2}{\text{Stangens Vægt}}$, altsaa for ligedannede Indretninger som $\frac{q^2}{A^3}$, følgelig q som $A^{\frac{3}{2}}$, og β som $\frac{A^{\frac{3}{2}}}{r}$. Jeg antager $n = 6$ og $q = \frac{1}{4}$ Linie, naar $A = 4$ Fod, og viser da følgende Tavle hvad A, β og Stangens Svingningstider blive for givne og hosføiede Værdier af D og r.

D i Fod, T i Secunder, A i Fod, β i Minuter.

r i Tomme.		D = 5′	10′	15′	20′	40′	80′	120′	160′
	T =	1,3″	1,8″	2,2″	2,6″	3,6″	5,2″	6,2″	7,2″
1″	A i Fod	2,24	3,16	3,87	4,47				
	β i Min.	5,0	8,2	11,4	14,1				
$\frac{3}{4}$″	A	1,94	2,74	3,35	3,87	5,48			
	β	5,4	9,0	12,2	15,2	25,4			
$\frac{1}{2}$″	A	1,58	2,24	2,74	3,16	4,47			
	β	6,0	10,0	13,5	16,8	28,2			
$\frac{1}{4}$″	A	1,12	1,58	1,94	2,24	3,16	4,47	5,48	
	β	7,1	11,9	16,1	20,0	33,6	56,6	76,7	
$\frac{1}{8}$″	A						3,16	3,87	4,47
	β						67,2	91,2	112,8

Fra Værdierne af A og β følger at man ei kan faae D betydelig stor, uden at enten A eller β, eller begge tillige ville blive store. Nu fordrer Beqvemheden at A ei bliver alt for stor; jeg har anseet $4\frac{1}{2}$ Fod for den største

anta-

antagelige Længde for Stangen. Vil man nu med denne Længde have D $= 160$ Fod, da maae $r = \frac{1}{8}$ Tomme, og β findes lig $1° \, 53'$. Men denne Værdie grundes paa at $n = 6$. Ved Frictionshiul kan n forstørres næsten i hvad Forhold man vil; med dem vil det altsaa stedse være mueligt at giøre β ubetydelig, og deres Brug vilde blive fornøden endog for mindre Værdier af D, naar Instrumentet skulde have nogen Nøiagtighed, fordi 2β maae ansees som den egentlige Uvished, da man ei veed til hvilken Side af Vertikalen Stangen giorde Vinkelen β med samme. Antages da at Axlen lægges paa saadanne Hiul, og $D = 160$ Fod, $\alpha = 3°$, $\acute{a} = 1$ Fod, da findes største Værdie af $\omega = 2\frac{1}{4}'$, hvilket omtrent vil være den mindste Bue, der er kiendelig paa en inddeelt Cirkel af $2\frac{1}{4}$ Fods Radius; denne Afvigning kan altsaa fuldkommen ansees for ubetydelig. I øvrigt er Hensigten af disse Beregninger kun at give det almindelige Oversyn; saavel E og r som β skulle i Udøvelsen bestemmes ved Instrumentet selv, og kunne ei nøiagtigen angives uden ved samme.

§. 5.

For at afværge Tanken, at Betragtningen her kunde endes uden synderlig Tab for Hovedhensigten, maae jeg anmærke følgende:

a) Skiøndt det foreslagne Instrument er i sin Grundidee yderlig simpelt, sees det dog lettelig at samme vil fordre nogen Nøiagtighed saavel til dets Forfærdigelse som Brug. Lad sættes man ønskede det skulde søge Vertikalen paa 1 Minut nær, naar $r = \frac{1}{8}$ Tomme, saa vil dertil udfordres at Frictionen bliver kun $\frac{1}{680}$ af Pressionen. Dette kan vel opnaaes ved Frictionshiul, men for at disse ei bringe skadelige Ujevnheder med sig, maae de forfærdiges af en Kunstner, der har Idee om Nøiagtighed.

b) Da r er kun $1\frac{1}{2}$ Linie, vil en endog liden Forandring deri have betydelig Indflydelse paa Instrumentet. Dette fordrer altsaa nogen Omhue i Brugen deraf. I Sammenligning med det almindelige Lod vil dette altsaa fordre endeel Bekostning og Omstændigheder. Man spørger med Rette: er ogsaa alt dette fornødent? og er det saa i alle Tilfælde?

c) Som Skibene svinge i meget forskiellige Tider, er det ei rimeligt at een Værdie af r skulde passe lige godt for dem alle; til Oplysning derom er en nøiere Theorie fornøden. Den i §. 3 antagne Slutning kan ei heller ansees tilforladelig. Forestiller man sig at Skibet har endt den første Oscillation, og Stangen da afveget en Vinkel ω, saa vilde Stangens Afvigning ved Enden af anden Oscillation være o, dersom Tyngden ei virkede. Med denne vil altsaa Stangen faae en Afvigning grundet i Tyngden, og som vi ei fra det hidtil fundne kunne bestemme. Afvigningerne kunne altsaa mueligen blive større i de følgende Oscillationer, end de uden Tyngden vilde være. Til Besvarelse af alt dette gaaer jeg til anden Afdeling.

B.

§. 6.

Foregaaende Benævnelser bibeholdes. Skibets Punct H er antaget at svinge omkring Punctet L (Fig. 3). Hvilke endog de svingende Kræfter ere, maae de kunde forestilles ved en Function af φ, og man maae almindelig have $d.v = (G \,\text{Sin.}\,\varphi + G' \,\text{Sin.}\,\varphi^2 + G'' \,\text{Sin.}\,\varphi^3 + +) d.T.$ Men som der er liden Rimelighed for at kunde angive G', G'' ꝛc. a priori, og aldeles ingen at kunde giøre det ved Forsøg eller Erfaring, skal jeg her alene tage det første Led af Rækken i Betragtning. For Punctet H's Bevægelse haves altsaa

$$d.v = G \,\text{Sin.}\,\varphi d.T.$$

Derfra ved den bekiendte Theorie af svingende Legemer:

$$v^2 = \left(\frac{d.\varphi}{dT}\right)^2 = 2G(\text{Cos.}\,\varphi - \text{Cos.}\,\alpha);$$

T =

$$T = \frac{\pi - 2\,\text{Arc. Sin.}\left(\frac{\Phi}{\alpha}\right)}{2G^{\frac{1}{2}}},$$ fordi Buen α er af liden Etendue.

(See Tillægget.)

Naar t er Tiden af hele Oscillationen, haves altsaa $G = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2$, og kan derfor findes ved at observere Skibets Svingningstid.

§. 7.

Man forestille sig nu Stangen (Fig. 3) som i sidste Moment af T. De virkende Kræfter reduceres til hvad de virke parallel med HK og perpendicular paa samme. Af disse have vi kun med de sidste at bestille.

Lad (Fig. 5) Axlen virke i H efter Hh $= x$,

Tyngden i I efter Ii $= p' = p\,\text{Sin.}\,\omega d\,.\,T$,

og Luftens Modstand i V efter Vv $= q$.

Lad VI $= Q$.

Lad Resultanten af disse trende Kræfter virke i R efter Rr, saa haves

Resultanten $= x + p' - q$; $RI = \frac{rx - Q\,.\,q}{x + p' - q}$.

Tilvæxten af Stangens Vinkelgesvindighed for dette Moment, eller $d\,.\,w$, maae skee om et Punct, til hvilket R er Stødets Center; lad dette være N', og IN' $= y$, saa haves fra kiendte mekaniske Principer:

$$(D - r)r = y\,.\,RI,\quad d\,.\,w = \frac{x + p' - q}{y} = \frac{\acute{a}d\,.\,v}{y + r}.$$

Derfra findes igien letteligt:

$$x = \frac{(D - r)\acute{a}d\,.\,v - (D - r)(p' - q) + Q\,.\,q}{D},$$

$$Dd\,.\,w = ad\,.\,v - p' + \frac{r - Q}{r}q.$$

Naar altsaa Resultanten af Luftens Modstand gaaer giennem H, er dens Virkning paa $w = 0$. **Dette antager jeg at skee her, og bliver da, naar Værdierne indsættes,**

$$Dd\frac{d\omega}{dT} = \acute{a}\,G\,\mathrm{Sin.}\,\varphi d\,.\,T - p\,\mathrm{Sin.}\,\omega d\,.\,T.$$

Denne Æqvation bliver det nu Spørgsmaalet at integrere.

§. 8.

Som φ og ω ere smaa, sætte vi Buer for Sinuser, og er da

$$d\frac{d\omega}{dT} + \frac{p}{D}\omega d\,.\,T = \frac{\acute{a}G}{D}\varphi d\,.\,T.$$

Lad $\omega = z\,.\,8$. Naar denne Værdie indsættes, reduceres det til Integrationen af følgende tvende:

1) $d\frac{dz}{dT} + \frac{p}{D}zd\,.\,T = 0;$

2) $zd\frac{d8}{dT} + \frac{2d\,.\,8dz}{(dT)^2} = \frac{\acute{a}G}{D}\varphi d\,.\,T$ (*).

Den første er integrabel ved at multiplicere med $\frac{dz}{dT}$, og faaes da:

$$T = \int\frac{dz}{\left(1-\frac{p}{D}z^2\right)^{\frac{1}{2}}};$$ og derfra

$$z = \left(\frac{D}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Sin.}\left[\left(\frac{p}{D}\right)^{\frac{1}{2}}.\,T\right].$$

Den anden Æqvation bliver integrabel ved at multipliceres med z, og faaes da:

$$8 = \frac{\acute{a}G}{D}\int\frac{d\,.\,T\,.\int\varphi zd\,.\,T}{z^2}.$$

§. 9.

(*) Den givne Æqvation er:

$$A.\quad d\frac{d\omega}{dT} + \frac{p}{D}\omega d\,.\,T - \frac{\acute{a}G}{D}\varphi d\,.\,T = 0.$$

Det antages at $\omega = z\,.\,8$ (z og 8 anseete begge som variable og Functioner af T). Naar denne indsættes i *A.*, faaes:

$$B.\quad 8d^2\,.\,z + \frac{p}{D}z8d\,.\,T + zd^2\,.\,8 + 2d\,.\,8d\,.\,z - \frac{\acute{a}G}{D}\varphi d\,.\,T = 0.$$

Denne Æqvation fyldestgiort, saa er og *A.* fyldestgiort, samt Værdien af ω bestemt. Men som nu *B.* kan kun give een Bestemmelse, og indeholder dog tvende variable, der skulle bestemmes, saa er det aabenbar at den anden Variables Bestemmelse er fuldkommen overladt til os selv. Dette er og den eneste Hensigt med at indføre

§. 9.

Lad $\frac{\Phi}{\alpha} = \text{Cos}.\,\psi$, saa er $\varphi = \alpha\,\text{Cos}.\,\psi$, og $\text{Arc. Sin.}\left(\frac{\Phi}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\pi - \psi$; altsaa $T = \frac{\psi}{G^{\frac{1}{2}}}$. Videre antages $\left(\frac{p}{DG}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{G}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{D}{p}\right)^{\frac{1}{2}}} = m$, og vil da m angive hvorledes Skibets og Stangens Svingningstider ere mod hinanden; er den $= 1$, ville de være eenstidige; er $m = 2, 3, 4$ rc., vil Stangen svinge 2, 3 rc. Gange saa hurtig som Skibet; men er $m = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ rc., vil Skibet svinge 2, 3 rc. Gange saa hurtig som Stangen. I Følge disse Antagelser haves da:

$z =$

tvende Variable isteden for den ene ω. Vi kunne da saaledes antage f. Ex. for z hvilken Function af T vi ville. Eftersom den tages til, vil vel Formen af $\varkappa$ forandres, men ingenlunde ω eller Productet $z.\varkappa$. Isteden for nu at antage (som i Blinde) en vis Function af T for Værdien af z, saa bemærkes, at som denne Antagelse dog ei skal giøre andet end bestemme z, saaledes at *B.* bliver integrabel, saa skeer dette lettest ved at betragte *B.* selv med Agtsomhed. Det vil da findes, at naar man til Bestemmelsen for z antager at:

$$\varkappa d^2.z + \frac{p}{D} z\varkappa d.T = 0,$$

eller ved Integrering $z = \left(\frac{D}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Sin.}\left[\left(\frac{p}{D}\right)^{\frac{1}{2}}.T\right]$,

og sætter (i Følge *B.*) ogsaa den øvrige Deel af Æqvationen *B.* $= 0$, eller

$$C. \quad zd^2.\varkappa + 2d.\varkappa d.z - \frac{\acute{a}G}{D}\varphi d.T = 0,$$

da vil denne og være integrabel, som ovenfor er viist. Naar man nu kunde strax have seet dette i Æqvationen *A.*, saa havde man aabenbar kun havt nødig at sætte ligefrem:

$$\omega = \left(\frac{D}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Sin.}\left[\left(\frac{p}{D}\right)^{\frac{1}{2}}.T\right].\varkappa.$$

Denne indsat i *A.* vilde da strax have givet *C.*, og det (blot tilsyneladende) Hypothetiske var da faldet bort af sig selv.

$$z = \frac{1}{mG^{\frac{1}{2}}} \text{Sin.}\,(m\psi),$$ og

$$\varphi z d.T = \frac{\alpha}{mG} \text{Cos.}\,\psi\ \text{Sin.}\,m\psi d.\psi.$$ Denne integreret giver:

$$\int \varphi z d.T = \frac{\alpha}{2mG}\left[C - \frac{\text{Cos.}\,(m+1)\psi}{m+1} - \frac{\text{Cos.}\,(m-1)\psi}{m-1}\right],$$ hvor C er en antagen Constant, som siden skal bestemmes.

Altsaa $$d.\vartheta = \frac{m\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{2D}\left[\frac{C - \frac{\text{Cos.}\,(m+1)\psi}{m+1} - \frac{\text{Cos.}\,(m-1)\psi}{m-1}}{(\text{Sin.}\,m\psi)^2}\right]d.\psi.$$

For at integrere denne Æqvation, mærkes at man haver:

$$\text{Cos.}\,(m+1)\psi = \text{Cos.}\,(m\psi)\,\text{Cos.}\,\psi - \text{Sin.}\,m\psi\,\text{Sin.}\,\psi,$$
$$\text{Cos.}\,(m-1)\psi = \text{Cos.}\,m\psi\,\text{Cos.}\,\psi + \text{Sin.}\,m\psi\,\text{Sin.}\,\psi.$$

Disse indsat give:

$$d.\vartheta = \frac{m\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{2D}\left[\frac{C}{\text{Sin.}\,m\psi^2} - \frac{2}{m^2-1}\left(\frac{m\,\text{Cos.}\,\psi\,\text{Cos.}\,m\psi}{\text{Sin.}\,m\psi^2} + \frac{\text{Sin.}\,\psi}{\text{Sin.}\,m\psi}\right)\right]d.\psi;$$

men $$\left(\frac{m\,\text{Cos.}\,\psi\,\text{Cos.}\,m\psi}{\text{Sin.}\,m\psi^2} + \frac{\text{Sin.}\,\psi}{\text{Sin.}\,m\psi}\right)d.\psi = -d\left[\frac{\text{Cos.}\,\psi}{\text{Sin.}\,m\psi}\right].$$

Derfor $$\vartheta = \frac{2m\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{2D}\left[C' - \tfrac{1}{2}C\,\text{Cot.}\,m\psi + \frac{1}{m^2-1}\frac{\text{Cos.}\,\psi}{\text{Sin.}\,m\psi}\right],$$ hvor C' er en anden Constant, der bliver at bestemme.

§ 10.

I Følge Antagelsen i §. 8 er $\omega = z.\vartheta$; derfor

$$\omega = \frac{\acute{a}\alpha}{D}\left[C'\,\text{Sin.}\,m\psi - \tfrac{1}{2}C\,\text{Cos.}\,m\psi + \frac{\text{Cos.}\,\psi}{m^2-1}\right],$$ og derfra

$$\frac{d\omega}{dT} = \frac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{D}\left[mC'\,\text{Cos.}\,m\psi + \tfrac{1}{2}mC\,\text{Sin.}\,m\psi - \frac{\text{Sin.}\,\psi}{m^2-1}\right].$$

Som nu Bevægelsen supponeres at begynde naar $T = 0$, saa maae ω og $\frac{d\omega}{dT}$ være 0, naar $\psi = 0$; derved findes $C' = 0$, og $\frac{1}{2}C = \frac{1}{m^2-1}$,

og

og derved $\begin{cases} \omega = \dfrac{\acute{a}\alpha}{(m^2-1)D}[\mathrm{Cos.}\,\psi - \mathrm{Cos.}\,m\psi], \\ \dfrac{d\omega}{dT} = \dfrac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{(m^2-1)D}[m\,\mathrm{Sin.}\,m\psi - \mathrm{Sin.}\,\psi]. \end{cases}$

§. 11.

Disse Æqvationer svare for alle Værdier af m, undtagen naar den er 1, da de give ubestemt Svar $= \frac{0}{0}$. Ved i §. 9 at sætte $m = 1$ findes

$$\omega = \frac{\acute{a}\alpha}{2D}[(C + \psi)\,\mathrm{Sin.}\,\psi],$$

$$\frac{d\omega}{dT} = \frac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{2D}[\mathrm{Sin.}\,\psi + (C+\psi)\,\mathrm{Cos.}\,\psi].$$

For at disse blive 0, naar $\psi = 0$, maae C være $= 0$. Derfor haves:

Casu $m = 1$ $\begin{cases} \omega = \dfrac{\acute{a}\alpha}{2D}\psi\,\mathrm{Sin.}\,\psi, \\ \dfrac{d\omega}{dT} = \dfrac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{2D}[\mathrm{Sin.}\,\psi + \psi\,\mathrm{Cos.}\,\psi]. \end{cases}$

§. 12.

For at en Stang svarte bedst til Hensigten, maatte, naar $\varphi = -\alpha$, eller $\psi = 180°$, ei alene $\acute{\omega}$, men og $\frac{d\acute{\omega}}{dT}$ være $= 0$. Ei alene fordrer Observationen dette, men det er klart at Casu $\frac{d\acute{\omega}}{dT}$ ei bliver 0; det er fornøden at undersøge de følgende Oscillationer, fordi $\acute{\omega}$ i Slutningen af dem kunde da skielle meget fra $\acute{\omega}$ i første Oscillations Ende. Sættes $\psi = \pi$ i de sidst fundne Æqvationer for $m = 1$, da bliver $\acute{\omega} = 0$, men $\frac{d\acute{\omega}}{dT} = -\frac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\pi}{2D}\alpha$. Som nu denne Hastighed er imod Bevægelsen i første Oscillation, saa er den med Bevægelsen i anden Oscillation; følgelig bør, naar ψ i denne er 0, haves $\frac{d\acute{\omega}}{dT} = \frac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\pi}{2D}\alpha$. Fra de generale Æqvationer i §. 11 maae derfor $C + \psi$

 være

være $=\pi$, og da $\psi = 0$, $C = \pi$. Æqvationerne for anden Oscillation ere altsaa følgende:

$$\omega = \frac{\acute{a}\alpha}{2D}(\pi + \psi)\,\text{Sin.}\,\psi,$$

$$\frac{d\omega}{dT} = \frac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{2D}(\text{Sin.}\,\psi + (\pi + \psi)\,\text{Cos.}\,\psi).$$

Naar ψ i denne sættes $=\pi$, findes $\acute{\omega} = 0$, men $\frac{d\acute{\omega}}{dT} = -\frac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{2D}\,2\pi$; derved for tredie Oscillation $C = 2\pi$, hvorved altsaa dens Æqvation findes. Ved samme Fremgangsmaade haves for nte Oscillation:

$$m = 1 \left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\acute{a}\alpha}{2D}[(n-1)\pi + \psi]\,\text{Sin.}\,\psi, \\ \frac{d\omega}{dT} = \frac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{2D}[\text{Sin.}\,\psi + ((n-1)\pi + \psi)\,\text{Cos.}\,\psi]. \end{array} \right.$$

Det sees altsaa at skiøndt $\acute{\omega}$ i Enden af enhver Oscillation bliver 0, saa voxer Hastigheden for samme Tidspunct dog stedse med Svingningernes Antal, saa at Stangen bliver meer og meer uroelig som bemeldte Antal tiltager.

§. 13.

Naar man ligeledes i §. 10 sætter $\pi = \psi$, haves for Enden af første Oscillation:

$$\acute{\omega} = -\frac{(m^2-1)D}{\acute{a}\alpha}(1 + \text{Cos.}\,m\pi),$$

$$\frac{d\acute{\omega}}{dT} = \frac{m\acute{a}\alpha G^{\frac{1}{2}}}{(m^2-1)D}\,\text{Sin.}\,m\pi.$$

Disse blive begge 0 for alle hele uefne Talværdier af m, eller naar $m = 3$, 5, 7, 9 ꝛc. $\frac{d\acute{\omega}}{dT}$ bliver og 0, naar $m = 2, 4, 6, 8$ ꝛc., men ei $\acute{\omega}$. Som det nu ei er muelig at m kan stedse gives en vis bestemt Værdie, maae vi ogsaa her undersøge de følgende Oscillationer formedelst de generale Æqvationer i §. 10. Til at bestemme C og C′ for anden Oscillation haves altsaa følgende Æqvationer:

$\frac{\acute{a}\alpha}{(m^2-1)D}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\acute{a}\alpha}{(m^2-1)D}(1+\text{Cos.}\,m\pi) &= \frac{\acute{a}\alpha}{D}\left(\frac{1}{m^2-1}-\tfrac{1}{2}C\right)\\ -\frac{m\acute{a}\alpha G^{\frac{1}{2}}}{(m^2-1)D}\,\text{Sin.}\,m\pi &= \frac{\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{D}\,mC'.\end{aligned}\right\}$$ ψ i anden Oscillation supponeres $= 0$.

Derved $\frac{1}{2}C = -\frac{\text{Cos.}\,m\pi}{m^2-1}$, og $C' = -\frac{\text{Sin.}\,m\pi}{m^2-1}$.

Disse indsat for $\frac{1}{2}C$ og C' i §. 10 give følgende Æqvationer for anden Oscillation:

$$\omega = \frac{\acute{a}\alpha}{(m^2-1)D}[\text{Cos.}\,\psi + \text{Cos.}\,m(\pi+\psi)],$$

$$\frac{d\omega}{dT} = -\frac{m\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{(m^2-1)D}\left[\text{Sin.}\,m(\pi+\psi)+\frac{\text{Sin.}\,\psi}{m}\right].$$

Ved samme Fremgangsmaade findes derfra igien Æqvationerne for tredie Oscillation o. s. v.

§. 14.

Lad $\frac{\acute{a}\alpha}{(m^2-1)D}$ være $= E$, og $\frac{m\acute{a}G^{\frac{1}{2}}\alpha}{(m^2-1)D} = F$, saa haves følgende generale Æqvationer:

For 1. Oscillation $\omega = E(\text{Cos.}\,\psi - \text{Cos.}\,m\psi)$,

$$\frac{d\omega}{dT} = F\left[\text{Sin.}\,m\psi - \frac{\text{Sin.}\,\psi}{m}\right];$$

\- 2. - - $\omega = E(\text{Cos.}\,\psi + \text{Cos.}\,m(\pi+\psi))$,

$$\frac{d\omega}{dT} = -F\left[\text{Sin.}\,m(\pi+\psi)+\frac{\text{Sin.}\,\psi}{m}\right];$$

\- 3. - - $\omega = E(\text{Cos.}\,\psi - \text{Cos.}\,m(2\pi+\psi))$,

$$\frac{d\omega}{dT} = F\left[\text{Sin.}\,m(2\pi+\psi)-\frac{\text{Sin.}\,\psi}{m}\right];$$

\- n. - - $\omega = E(\text{Cos.}\,\psi \mp \text{Cos.}\,m((n-1)\pi+\psi))$,

$$\frac{d\omega}{dT} = \mp F\left[\text{Sin.}\,m((n-1)\pi+\psi)\pm\frac{\text{Sin.}\,\psi}{m}\right].$$

Det øverste Tegn giælder naar n er et effen Tal. Sættes nu $\psi = \pi$ i disse, faaer man for Slutningen af

1. Oscillation $\acute{\omega} = -E(1 + \text{Cos}.\, m\pi)$, $\frac{d\acute{\omega}}{dT} = + F\, \text{Sin}.\, m\pi$;

2. - - $\acute{\omega} = -E(1 - \text{Cos}.\, 2m\pi)$, $\frac{d\acute{\omega}}{dT} = - F\, \text{Sin}.\, 2m\pi$;

3. - - $\acute{\omega} = -E(1 + \text{Cos}.\, 3m\pi)$, $\frac{d\acute{\omega}}{dT} = + F\, \text{Sin}.\, 3m\pi$;

n. - - $\acute{\omega} = -E(1 \mp \text{Cos}.\, nm\pi)$, $\frac{d\acute{\omega}}{dT} = \mp F\, \text{Sin}.\, nm\pi$.

Det øverste Tegn giælder naar n er et effen Tal. Fra disse Æqvationer uddrages lettelig følgende Slutninger:

a) Er m et effen Tal, vil $\acute{\omega}$ i 1te, 3de, 5te ꝛc. Oscillation være $= 2E$, derimod i 2den, 4de, 6te ꝛc. Oscillation $= 0$; er m et ueffen heelt Tal, vil den være 0 i alle Oscillationer. Det samme vil endnu skee hvad Værdie end m har, kuns der kommer et større Antal Oscillationer imellem Grændseværdierne. Lad f. Ex. m være $= \frac{\delta}{\varepsilon}$, disse Primtal mellem sig, saa vil $\acute{\omega}$ ei blive 0 eller 2E førend i den εte Oscillation; den vil blive 0 naar ε er ueffen og δ ligeledes, derpaa 0 igien i den 2εte, 3εte ꝛc. Oscillation; i alle øvrige Variationer af ε og δ vil den blive 2E i den εte Oscillation, 0 i den 2εte, 2E i den 3εte o. s. v.

b) I alle Tilfælde at $\acute{\omega} = 0$ eller 2E, og ellers ikke, vil $\frac{d\acute{\omega}}{dT}$ være 0, den vil derimod være Maximum $= F$ naar $\acute{\omega} = E$.

c) Dersom altsaa Tilfældet maae supponeres saaledes, at Værdierne af m ei kunne være nøie bekiendte, eller og at de kunne variere noget fra een Oscillation til en anden, saa vil 2E være Feilen man udsætter sig for med Instrumentet, fordi den er den største Afvigning fra Verticalen. Ligeledes udtrykker F den største Vinkelgesvindighed i Slutningen af nogen Oscillation. Vi have altsaa at undersøge Værdierne af E og F.

§. 15.

§. 15.

I Følge §. 9 er $D = \frac{p}{m^2 G} = \frac{p}{m^2}\left(\frac{t}{\pi}\right)^2$, altsaa

$$E = \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{\acute{a}G}{p} \cdot \alpha,$$

$$F = \frac{m^3}{m^2 - 1} \cdot \frac{\acute{a}G^{\frac{3}{2}}}{p} \cdot \alpha.$$

I disse Værdier er nu p constant, G og α gives ved Naturen af Skibet og de svingende Kræfter; á afhænger fornemmelig af Ophængningspunctet, altsaa for alle Sving omkring Langaxlen eller Skibets horizontale Tyngdediametre i Almindelighed, for saavidt i vor Magt at formindske, som vi kiende Tyngselspunctets Situation nøie til. Under nærværende Betragtning indgaaer derfor intet uden Factorerne $\frac{m^2}{m^2 - 1}$ og $\frac{m^3}{m^2 - 1}$. Da Qvæstionen er at formindske dem saa vidt muelig, vil det let findes at skee naar m selv gieres saa meget muelig mindre end 1. Dette sees ydermere fra følgende Værdier:

	$\frac{m^2}{m^2-1}$	$\frac{m^3}{m^2-1}$
$m = 4$	$1\frac{1}{15}$	$4\frac{4}{15}$
$m = 3$	$1\frac{1}{8}$	$3\frac{3}{8}$
$m = 2$	$1\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$
$m = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$m = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$
$m = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{60}$.

Det staaer immer i vor Magt at giøre $m = 4$ og derover. Dersom vi altsaa og kunde vælge at giøre den $= \frac{1}{4}$ og derunder, da viser hosstaaende, at Instrumentet af sidstmeldte Indretning vilde have sin største muelige Afsvigningsbue kuns $\frac{1}{16}$ af den førstes, og dens største Gesvindighed vilde kuns være $\frac{1}{256}$ af den førstes. Det er altsaa fornødent at undersøge, naar og hvorvidt vi kunne giøre m betydelig mindre end 1.

§. 16.

§. 16.

I Følge §. 6 er $G = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2$. Antage vi at Skibet giør sine Sving i

2	Secunder, bliver altsaa G =	2,47	og D =	$\frac{12,24}{m^2}$ Fod;
3	- - - - -	1,08	- -	$\frac{27,54}{m^2}$ -
4	- - - - -	0,62	- -	$\frac{48,96}{m^2}$ -
5	- - - - -	0,39	- -	$\frac{76,50}{m^2}$ -

Formodentlig ville Skibenes fleste Svingningstider omkring Langaxlerne falde mellem de her antagne; de hosstaaende Værdier for D kunne altsaa tiene til at bestemme denne, naar m gives, eller og omvendt m, naar D gives. Ved Instrumentet, man almindelig bruger til at maale Skibenes Krængninger, er (saavidt mig er bekiendt) aldrig taget Hensyn paa Skibenes Svingningstider. De ere ophængte som det sædvanlige Lod, have ungefær D = r, denne Længde noget varierende, almindeligst henved 1 Fod, ei sielden endnu mindre. Tage vi fra dette Instrument alene dens Grundprincip, nemlig at den bør svinge hurtigere end Skibet (hvilket i Virkeligheden er kuns en Følge af dens korte Længde), saa forestiller Fig. 5 et Instrument bygget derpaa, og passende med Hensigten her. Jeg skal i det følgende betegne dette ved første Instrument. Det hidtil i denne Afhandling omtalte, hvor D er meget stor mod r, og som i Følge foregaaende §. bør svinge saa meget muelig langsommere end Skibet, skal jeg betegne ved andet Instrument. Følgende Tavle vil vise Sammenligningen mellem disse tvende Instrumenter, naar D i hiint tages = 1 Fod. I den forestiller

2E (som forhen viist) den største Vinkel, det er muelig Stangen kan giøre med Vertikalen i Enden af nogen Oscillation, hvor mange lige store af disse der endog have fulgt paa hinanden.

F fore-

F forestiller den største Vinkelgesvindighed, det er muelig Stangen kan have i Enden af nogen Oscillation, hvor mange lige store af disse der end have fulgt paa hinanden, blot undtagen naar m = 1, da betyder F Vinkelgesvindigheden i første Oscillations Ende, og skal multipliceres med n for at have den i nte Oscillation. *NB.* Dette alt at forstaaes for de hosatte Værdier af D og m.

Skibenes Svingningstid.	Første Instrument.		Andet Instrument.		
	D = 1 Fod	m = $\frac{3}{2}$	m = 1	m = $\frac{1}{2}$	D=160Fod
2''	m = 3,5	D = 5,4'	12,2'	48,8'	m = 0,28
	2E = 0,089á(2α)	0,147á(2α)	0,00	0,027á(2α)	0,0068á(2α)
	F = 0,24á(2α)	0,17á(2α)	0,03á(2α)	0,01á(2α)	0,0015á(2α)
3''	m = 5,2	D = 12,2'	27,5'	110,2'	m = 0,41
	2E = 0,038á(2α)	0,065á(2α)	0,00	0,012á(2α)	0,0075á(2α)
	F = 0,10á(2α)	0,05á(2α)	0,09á(2α)	0,003á(2α)	0,0016á(2α)
4''	m = 7,0	D = 21,8'	49,0'	195,8'	m = 0,55
	2E = 0,020á(2α)	0,037á(2α)	0,00	0,007á(2α)	0,0090á(2α)
	F = 0,06á(2α)	0,02á(2α)	0,004á(2α)	0,001á(2α)	0,0020á(2α)
5''	m = 8,7	D = 34,0'	76,5'	306,0'	m = 0,69
	2E = 0,013á(2α)	0,024á(2α)	0,00	0,004á(2α)	0,0120á(2α)
	F = 0,04á(2α)	0,01á(2α)	0,002á(2α)	0,0007á(2α)	0,0026á(2α)

§. 17.

Sædvanlig ophænges det første Instrument saaledes at á = 6, 8 a 10 Fod efter Skibenes Størrelse. Med denne Brugsmaade viser Tavlen at baade 2E og F blive meget betydelige, særdeles for de Skibe, der svinge i 2 a 3 Secunder. 2E vilde saaledes blive $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{2}$ gang (2α), og F = $\frac{1}{2}$ à 1 gang (2α); altsaa var paa den Maade ei at tænke paa at maale Svingnings-

buerne,

buerne, og Krængningen selv vilde i mange Tilfælde være aldeles utilforladelig. Men som det ingen Fornødenhed er at á tages saa stor, skal jeg ansee den $= 1$ Fod, og da viser Tavlen at dette Instrument ei er ubrugelig for de langsomme Sving, som de i 5 Secunder eller derover. 2E findes da $= \frac{2\alpha}{75{,}5}$, og $F = \frac{2\alpha}{25}$, naar $t = 5''$, og de kunne ved en bedre Indretning af Stangen giøres noget mindre, hvorom siden efter. Hvad derimod Svingene i kortere Tid angaaer, da vil neppe en Stang indrettet efter dette Princip kunde give nogen synderlig Grad af Nøiagtighed. Vilde man giøre D mindre, blev m større, men derved vil 2E kuns aftage ubetydelig, F derimod voxe næsten som m, naar Alt for Resten er lige (§. 15). Tager man derimod D mærkelig større, bliver m og derved F mindre, men da voxer igien 2E, fordi m har for $D = 1$ Fod just ingen høi Værdie for de hurtigere Sving.

§. 18.

Ved at betragte Eqvationen i §. 14 kunde det synes at det her omtalte Instrument frakiendtes sin sande Værdie; thi da 2E og F ere begge 0 naar $m = 3, 5, 7$ 2c., saa synes det ved første Øiekast ei vanskelig at indrette dette Instrument saaledes at m fik een af disse Værdier; jeg anmærker derfor: Forestiller man sig et complet udrustet Skib i et stille Vand, saa vil det have en vis Svingningstid, og denne vil ei betydelig forandres enten ved Luftens eller Vandets Modstand. Blev altsaa denne Tid enten givet ved Skibets Constructeur, eller fundet ved directe Observationer af Skibets Svingninger, saa var intet lettere end at give Instrumentet den behørige Indretning. Men uden at tage Vanskeligheden ved den nøiagtige Angivelse af denne Svingningstid i Betragtning, synes mig det Umuelige paa den Maade at faae et tilforladelig Maalingsinstrument er klart fra følgende Grunde:

a) Er

a) Er Svingningstiden givet for B = o, vil den variere noget naar B voxer. Forandringer i Skibets Last ꝛc. kunne og derpaa have nogen Indflydelse.

b) Skiøndt det almindelig er rigtig, at Legemernes Svingningstider forandres kuns meget lidet af de modstaaende Kræfter som Friction og flydende Ting, saa er dog Tilfældet med et Skib, der svinger med udspændte Seil, saa eget, Kræfterne virke med saa store Vægtstangsarme, at man snarere maae ønske det bekræftet eller nægtet ved directe Observation, end just bygge derpaa som en Vished.

c) Skibet seiler sielden eller aldrig uden at Søen tillige er meer eller mindre oprørt; at Bølgerne maae have Indflydelse paa Skibets Sving saavel til at forkorte som forlænge dets Tider, er vel udenfor al Tvivl, ligesom det ogsaa er at vi à priori kunne intet bestemme deri med Vished.

Lad nu den antagne Svingningstid være $= 1$, Instrumentet indrettet til $m = 5$, og lad Skibet ved een af foregaaende Aarsager komme til at svinge i Tiden $1 + \frac{1}{5}$, saa vil den sande Værdie af m være 4 eller 6, og $\acute{\omega}$ vil blive $= 2E$ isteden for at være o. Lad Svingningstiden blive $1 + \frac{1}{8}$, saa vil den sande Værdie af m blive $\frac{40}{9}$ eller $\frac{40}{7}$, og $\acute{\omega}$ vil i den 7de og 9de Oscillation blive $= 2E$ isteden for at være o. Til Sikkerheden af et saadant Instrument synes det derfor nødvendig at saavel 2E som F ere i sig ubetydelige, men dette kan ei opnaaes ved første Instrument, uden naar Svingningstiderne ere 5 a 6 Secunder og derover. Naar Tanken fæstes til saadanne Svingninger, da maae et Instrument af ommeldte Natur vælges, som strax skal vises.

§. 19.

Det andet Instruments Hovedidee er: at det skal svinge langsommere end Skibet, og dette jo mere jo bedre. Men som alting har sine Grændser,

 saa

saa begribes det og lettelig at Skibets Svingningstider kunne være saa store, at det bliver umuelig at give D den behørige Værdie. For Sikkerheden og Nøiagtigheden af dette Instrument er det fornøden ei alene at det svinger langsommere end Skibet, men og at dets Svingningstid ei nærmer sig Skibets inden en vis Grændse. Til at oplyse dette lad sættes at Skibets Svingningstid var 5 Secunder og at $m = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$, saa vil D findes 81,86 Fod, $\acute{\omega}$ vil rigtig nok i de første Oscillationer blive ubetydelig, men den vil bestandig voxe, og i den 30te vil den findes $= \frac{\acute{a}}{5,36}(2\alpha)$, som er dens Maximum. For nu altsaa at kunde fastsætte en Grændse, hvor dette Instrument er ei længere at foretrække første, maae mærkes i Følge §. 15 vil det altid have Fordelen for første i at giøre F mindre, fordi m er mindre end 1; deri kan altsaa ingen egentlig Sammenkomst blive. Hvad derimod 2E angaaer, da, naar første er i den Henseende bedst indrettet, vil $\frac{m^2}{m^2-1}$ være nær $= 1$, men dog stedse større end 1. Vi kunne altsaa i andet Instrument antage den Værdie af m til Grændse, der giør $\frac{m^2}{m^2-1} = 1$, thi da vil det over første ogsaa have Fordeel i Hensigt til 2E og følgelig i al Henseende paa hvad Nøiagtighed angaaer. Denne Værdie af m er $\frac{1}{\sqrt{2}}$, og bliver da intet videre tilbage end at bestemme for hvor stor Værdie af t det er muelig at giøre $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nu er $D = \frac{p}{\pi^2} \cdot \left(\frac{t}{m}\right)^2$; derfra findes at $t = 4''$ giver $D = 98$ Fod, $t = 5''$ giver $D = 153$ Fod. Gaaer man nu for et Øieblik tilbage til Tavlen (§. 4), saa sees at $D = 160$ Fod fordrer alt r saa liden og Frictionshiulene saa høie, at der ei er noget at tænke paa at kunde giøre D større. Det langsomste Sving, dette Instrument kan vel anvendes til at maale, er altsaa 5 Secunder, og mueligen kunde dets Execution raade til ei engang at anvende det til saa langsomme Sving, fordi den kunde vise ei nu seete Vanskeligheder ved at bringe D til 160 Fod. Antage vi her at det bringes saavidt,

vidt, da viser Tavlen*(§. 16) Nøiagtigheden som derved opnaaes; for $t = 5''$ er det mindst fordeelagtig; da bliver $2E = \frac{\acute{a}}{83}(2\alpha) = 4\frac{1}{3}$ Minut for de antagne Værdier af á og α; F er ubetydelig og ei 1 Minut. Ved den bedste Indretning vil man altsaa for denne Svingningstid udsættes for en Feil af $\frac{1}{83}$ af Svingningsbuen, hvilken just ei er betydelig, men mærkelig ved at være næsten dobbelt af det §. 4 for samme Værdie af D lovede. Den der fundne Nøiagtighed vil ei faae Sted før $t = 2''$ eller derunder.

§. 20.

For alle Skibenes Svingninger, hvortil bruges længere Tid end $5''$, maae altsaa første Instrument anvendes. Jeg skal derfor kortelig angive Hovedprincipet for dets Indretning. I Følge §. 15 sees at E dependerer af $\frac{m^2}{m^2-1}$; den vil rigtig nok blive mindre eftersom m tages større, men naar m overgaaer en vis Størrelse, vil denne Aftagelse blive meget ubetydelig; derimod vil F næsten voxe som m. Nu findes Brøken for $m = 5$ og $m = 6$ kuns at skielle $\frac{1}{71}$ fra hinanden, og som G er henved $\frac{1}{3}$, vil denne Forskiel kunne ansees ubetydelig; m bør derfor ei overgaae 5. Instrumentet vil da vise sig som følger:

$$\left.\begin{array}{llll} & t = 5'' & 6'' & 7'' \\ D = & 3{,}06' & 4{,}41' & 6{,}0' \\ 2E = & \frac{\acute{a}}{73{,}4}(2\alpha) & \frac{\acute{a}}{105{,}8}(2\alpha) & \frac{\acute{a}}{144{,}0}(2\alpha) \\ F = & \frac{\acute{a}}{46{,}7}(2\alpha) & \frac{\acute{a}}{80{,}9}(2\alpha) & \frac{\acute{a}}{128{,}4}(2\alpha) \end{array}\right\} m = 5$$

Man seer deraf at disse Svingninger ei ere vanskelige at maale med tilstrækkelig Nøiagtighed, og at denne vil blive større eftersom t voxer. Men som det er fordeelagtig saavel i Hensigt til F som det i §. 18 omtalte at m giøres saa liden muelig, saa viser følgende Udslaget naar $m = 3$.

 $t = 4''$

$$\left.\begin{array}{lllll} & t = 4'' & 5'' & 6'' & 7'' \\ D = & 5,44' & 7,50' & 12,24' & 16,66' \\ 2E = & \frac{á}{43,5}(2\alpha) & \frac{á}{56,0}(2\alpha) & \frac{á}{97,9}(2\alpha) & \frac{á}{133,2}(2\alpha) \\ F = & \frac{á}{36,9}(2\alpha) & \frac{á}{55,8}(2\alpha) & \frac{á}{124,7}(2\alpha) & \frac{á}{222,14}(2\alpha) \end{array}\right\} m = 3$$

Vil man altsaa have at Instrumentet skal for en vis Etendue af Svingningstid, f. E. fra 5 til 7'', ei give m mindre end 3 og ei større end 5, saa sees lettelig at D ei maae giøres større end 7,50' og ei mindre end 6,0'. Til den bedste Indretning af dette Instrument er det derfor fornøden at vide Variationen mellem Svingningstiderne, og naar disse fra 4 a 5'' af og op efter forandrede betydelig, da at have tvende Instrumenter eller flere, for at m kom stedse til at falde mellem de tvende bestemte Grændser.

§. 21.

Jeg haaber saaledes med temmelig Fuldstændighed at have viist saavel hvorpaa det kommer an ved at maale Skibenes Krængninger og Svingningsbuer, som og at det er muelig med næsten al fornøden Nøiagtighed. Jeg smigrer mig og med, at man ei vil finde meget tilsidesat, der efter den indskrænkte Antagelse i §. 6 kunde og burde medtages. Dog er jeg langt fra at ansee det som fuldstændig, jeg har derfor valgt foranstaaende Benævning, og haaber det efter denne maae af mine Dommere mildeligen bedømmes. Af Instrumenterne har jeg ei kundet angive uden Hovedideerne, fordi Skibenes Svingningstider ere endnu ei observerte.

Til-

Tillæg.

Til nærmere Oplysning af enkelte Steder i foregaaende Afhandling har jeg troet det passende at tilføie følgende Theorie af den pendulaire Bevægelse.

Et tungt Legeme antages ophængt til at svinge omkring en Axel; det forestilles heel nedsynket i et flydende, saa at det i hele Svingningstiden indtager stedse samme Cubikrum i det flydende. Tanken fæstes altsaa egentlig til Tilfældet, man vilde lade Legemer svinge i Vand eller andre Fluida, det være for at undersøge disses Modstandslove, det være i andre Henseende.

§. 1.

Lad Fig. 6 forestille det svingende Legeme.

I dets Tyngdepunct.

Í Tyngdepunctet af den nedsunkne Deel betragtet som homogen.

∠ AHQ dets første Opløftningsvinkel, hvor Bevægelsen altsaa supponeres at tage sin Begyndelse.

I sidste Moment af Tiden T antages det, som i Figuren, at giøre med Vertikalen HQ en Vinkel - - - - - - ω

Frictionen antages at virke efter Tangenten ab perpendicular paa HI, Ha = q

Vinkelgesvindighed i sidste Moment af T - - - - - v

Hastigheden, som Tyngden giver i 1 Secund, - - - - - p

Hastigheden, som det af Legemet deplacerte Fluidum kan give det svingende Systems Masse ved at virke constant i 1 Secund, - p'

Det Flydendes Modstand antages saaledes, at det ved at virke constant i 1 Secund, som i sidste Moment af T, kan give det svingende Systems Masse en Hastighed - - - - - av^2

Det

Det antages at virke perpendicular paa HI i en Afstand fra H $=$ á

Stødets Centers Afstand fra H i HI - - - - - D

$$HI = r, \quad H\acute{I} = r'$$

$$D \cdot r = N$$

$$\frac{\text{Pressio}}{\text{Frictio}} = n$$

Tallet, hvis hyperbolifke Logarithme $= 1$, - - - - - e

Den halve Circumference af Cirkelen, hvis Radius $= 1$, - π

Naar Centrifugalkraften medregnes, bliver Kraften eller Pressionen i Punctet a proportioneret $v^2 r + (p - p') \operatorname{Cos.} \omega$. For Korthed i Benævningerne antages det Flydendes Modstands Direction perpendicular paa HI; dette vil indtræffe for meget faa Legemer, men for saa vidt vi endnu kiende Naturen af denne Modstand, bør den i hele Bevægelsen giøre eens Vinkel med HI; forestiller man den altsaa deelt i tvende andre parallel med og perpendicular paa HI, saa vil den første af disse ei have anden Virkning paa Bevægelsen, end at den vil forøge eller formindske Pressionen i Punctet a med en Kraft proportioneret v^2 multipliceret med en Constant. Denne gaaer altsaa naturlig ind under $v^2 r$, og skal jeg des Aarsag antage Pressionen i Punctet a proportioneret $v^2 R + (p - p') \operatorname{Cos.} \omega$. Altsaa er $\frac{v^2 R + (p - p') \operatorname{Cos.} \omega}{n} =$ Hastigheden, som Frictionskraften kan give hele den svingende Masse ved at virke constant i 1 Secund som i sidste Moment af T. Vi have altsaa:

$$N dv = \left[(rp - {}'rp') \operatorname{Sin.} \omega - \frac{v^2 R + (p - p') \operatorname{Cos.} \omega}{n} q - v^2 a\acute{a} \right] dT;$$

men $v = -\frac{d\omega}{dT}$. Naar multipliceres dermed, haves:

$$N v dv - \left(a\acute{a} + \frac{Rq}{n} \right) v^2 d\omega = -\left[(rp - {}'rp') \operatorname{Sin.} \omega - \frac{(p - p')q}{n} \operatorname{Cos.} \omega \right] d\omega.$$

Lad h være Høidedebita til Hastighed $'rv$, saa er

$2ph = {}'r^2 v^2$, og $\frac{pdh}{{}'r^2} = vdv$. Indsættes den, er

Ndh

$$Ndh - 2\left(a\acute{a} + \frac{Rq}{n}\right)hd\omega = -{}'r^2\left[\left(r - r'\frac{p'}{p}\right)\mathrm{Sin.}\,\omega - \frac{\left(1 - \frac{'p}{p}\right)q}{n}\mathrm{Cos.}\,\omega\right]d\omega.$$

Lad $2\left(a\acute{a} + \frac{Rq}{n}\right)$ være $= A$, $\frac{r}{r'} - \frac{p'}{p} = m$, $1 - \frac{p'}{p} = m'$, saa er

$$Ndh - Ahd\omega = \left[-{}'r^3 m\,\mathrm{Sin.}\,\omega + \frac{m'.q.'r^2}{n}\mathrm{Cos.}\,\omega\right]d\omega.$$

Naar den integrerende Factor søges paa sædvanlig Maade, findes den $=$ $e^{-\frac{A}{N}\omega}$. Lad $\frac{A}{N}$ være $= A'$, da er

$$Nhe^{-A'\omega} = C - m'r^3\int\frac{\mathrm{Sin.}\,\omega d\omega}{e^{A'\omega}} + \frac{m'q'r^2}{n}\int\frac{\mathrm{Cos.}\,\omega d\omega}{e^{A'\omega}},$$

hvor C er en Constant, som siden efter skal bestemmes.

§. 2.

For Integrationen af denne Æqvation har man følgende tvende:

1. $d\left[\frac{\mathrm{Sin.}\,\omega}{e^{A'\omega}}\right] = \frac{\mathrm{Cos.}\,\omega d\omega}{e^{A'\omega}} - \frac{A'\,\mathrm{Sin.}\,\omega d\omega}{e^{A'\omega}},$

2. $d\left[\frac{\mathrm{Cos.}\,\omega}{e^{A'\omega}}\right] = -\frac{A'\,\mathrm{Cos.}\,\omega d\omega}{e^{A'\omega}} - \frac{\mathrm{Sin.}\,\omega d\omega}{e^{A'\omega}}.$

Ved at multiplicere 1. med A' og derpaa addere dem begge, haves:

$$-\int\frac{\mathrm{Sin.}\,\omega d\omega}{e^{A'\omega}} = \left(\frac{1}{1 + 'A^2}\right)\left[\frac{A'\,\mathrm{Sin.}\,\omega + \mathrm{Cos.}\,\omega}{e^{A'\omega}}\right].$$

Ved at multiplicere 2. med A' og derpaa trække den fra 1., haves:

$$\int\frac{\mathrm{Cos.}\,\omega d\omega}{e^{A'\omega}} = \left(\frac{1}{1 + 'A^2}\right)\left[\frac{\mathrm{Sin.}\,\omega - A'\,\mathrm{Cos.}\,\omega}{e^{A'\omega}}\right].$$

Altsaa $Nh(1 + \acute{A}^2) = C(1 + \acute{A}^2)(e^{A'\omega}) + m'r^3[\acute{A}\,\mathrm{Sin.}\,\omega + \mathrm{Cos.}\,\omega]$

$$+ \frac{m'q'r^2}{n}[\mathrm{Sin.}\,\omega - \acute{A}\,\mathrm{Cos.}\,\omega].$$

Lad A' være $= \mathrm{Tang.}\,\varepsilon$, og $\frac{'mq}{mnr'} = \mathrm{Tang.}\,\beta$, saa er

$$\left.\begin{array}{l} A'\,\text{Sin.}\,\omega + \text{Cos.}\,\omega = \dfrac{\text{Cos.}\,(\omega-\varepsilon)}{\text{Cos.}\,\varepsilon} \\ \text{Sin.}\,\omega - A'\,\text{Cos.}\,\omega = \dfrac{\text{Sin.}\,(\omega-\varepsilon)}{\text{Cos.}\,\varepsilon} \end{array}\right\} \text{ og } \frac{\text{Cos.}\,(\omega-\varepsilon) + \text{Tang.}\,\beta\,\text{Sin.}\,(\omega-\varepsilon)}{\text{Cos.}\,\varepsilon} = \frac{\text{Cos.}\,(\omega-\varepsilon-\beta)}{\text{Cos.}\,\varepsilon\,\text{Cos.}\,\beta}.$$

Følgelig $\frac{Nh\,\text{Cos.}\,\beta}{m'r^3\,\text{Cos.}\,\varepsilon} = \frac{C\,\text{Cos.}\,\beta}{m'r^3\,\text{Cos.}\,\varepsilon} e^{A'\omega} + \text{Cos.}\,(\omega-\varepsilon-\beta)$.

Nu skal h være o, naar $\omega = \alpha$; derved bestemmes C, og faaer man da endelig Æqvationen:

$$\frac{Nh\,\text{Cos.}\,\beta}{m'r^3\,\text{Cos.}\,\varepsilon} = \text{Cos.}\,(\omega-\varepsilon-\beta) - \text{Cos.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta)\,\frac{e^{A'\omega}}{e^{A'\alpha}}.$$

§. 3.

Den sidst fundne Æqvation er almindelig, og indeholder Opløsningen for alle Tilfælde af Flydendes Modstand efter den antagne Lov. Dersom vi (for først at betragte de simplere Tilfælde) supponere at Legemet svinger i Luften, da kan p' ansees $= 0$; derved $m' = 1$, $mr' = r$, og $\text{Tang.}\,\beta = \frac{q}{nr}$. Sættes da tillige Centrifugalkraften og Luftens Modstand udaf Betragtning, saa bliver $A = 0$; altsaa $\text{Tang.}\,\varepsilon$ og $A' = 0$, og Æqationen bliver da $\frac{Nh\,\text{Cos.}\,\beta}{r'r^2} = \text{Cos.}\,(\omega-\beta) - \text{Cos.}\,(\alpha-\beta)$. Deraf følger at Hastigheden er Maximum naar $\omega = \beta$. Naar ω sættes negativ, bliver $h = 0$ naar $\text{Cos.}\,(\omega+\beta) = \text{Cos.}\,(\alpha-\beta)$, det er: naar $\omega = \alpha - 2\beta$. Denne bliver altsaa Opløftningsbue i anden Oscillation, og følgelig Æqvationen for anden Oscillation:

$$\frac{Nh\,\text{Cos.}\,\beta}{r'r^2} = \text{Cos.}\,(\omega-\beta) - \text{Cos.}\,(\alpha-3\beta).$$

h bliver ogsaa her Maximum naar $\omega = \beta$, og o naar $\omega = \alpha - 4\beta$ o. s. v. Almindelig seer man altsaa at Hastigheden vil være størst naar $\omega = \beta$, hvor mange Oscillationer Legemet endog har giort. Som videre hele Oscillationsbuen aftager 2β for hver Oscillation, saa maae Legemet tilsidst standse, og

det

det er klart det maae standse i eet af de tvende Puncter, hvor dets Hastighed er Maximum. Naar dette indtræffer, vil altsaa dets hvilende Direction giøre en Vinkel β med den drivende Krafts Direction eller her med Verticalen. Derpaa grundes hvad Pag. 422 blev antaget. Det sees videre, at intet er lettere end at finde Tang. β eller $\frac{q}{nr}$; man behøver blot at bemærke Antallet af en Mængde Sving, samt Buen, som hele Oscillationsbuen i dem har aftaget; denne Aftagelse divideret med 2 gang Svingenes Antal er $= \beta$. Det udfordres kuns at Svingene maae være af saa liden Etendue, at Á kan i samme ansees $= 0$.

For Tidens Bestemmelse haves $\frac{h}{r^2} = \frac{v^2}{2p} = \frac{\left(\frac{d\omega}{dT}\right)^2}{2p}$;

altsaa $$\frac{-\left(\frac{D\,\mathrm{Cof.}\,\beta}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} d\omega}{[\mathrm{Cof.}\,(\omega-\beta) - \mathrm{Cof.}\,(\alpha-\beta)]^{\frac{1}{2}}} = dT.$$

Naar T supponeres at være 0 naar $\omega = \alpha$, findes følgende Integral:

$$T = \left(\frac{D\,\mathrm{Cof.}\,\beta}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left[\frac{\pi - 2\,\mathrm{Arc.Sin.}\left(\frac{\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(\omega-\beta)}{\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\right)}{2}\right]\left[1 + \frac{1^2}{2^2}\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^4\ \mathrm{rc.}\right] + \frac{\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(\omega-\beta)\,(\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 - \mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(\omega-\beta)^2)}{\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2}$$
$$\left.\times \left[\frac{1^2}{2^2}\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^4\ \mathrm{rc.}\right] + \mathrm{rc.}\right].$$

Deraf følger:

1) Casu ω negativ og $= \alpha - 2\beta$, det er naar Hastigheden anden gang $= 0$, er hele Oscillationstiden

$$t = \left(\frac{D\,\mathrm{Cof.}\,\beta}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \pi\left[1 + \frac{1^2}{2^2}\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^4 + \right].$$

Deraf sees at Modstanden, hvis Moment i sidste Dieblik af T defineres ved rp Tang. β Cof. ω, den vil stedse formindske Oscillationstiderne.

Naar den kuns angiver en Frictionskraft, som her er supponeret, da er β almindelig meget liden, og Formindskelsen i Tiden altsaa ubetydelig, men det sees let der kunne være andre Tilfælde.

2) Sættes $\beta = 0$ og α antages af liden Etendue, da kan Buerne selv sættes for Sinuserne, og det almindelige Udtryk for Tiden kan da uden mærkelig Feil blive følgende:

$$T = \frac{\pi - 2 \,\text{Arc. Sin.}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}{2\left(\frac{p}{D}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Derpaa grundes det antagne Udtryk for T Pag. 425.

§. 4.

Vi gaae nu tilbage til Hovedformelen (§. 2), og giøre det først til Spørgsmaal at finde Værdien for x eller A'. Naar ω er negativ, lad da, for $h = 0$, ω være $= \alpha - \delta'$, saa at δ' er Forsinkelsesbuen i det hele Sving. δ' saavelsom β ere da at ansee som bekiendte, og man har til at finde A' eller Tang. x følgende Æqvation:

$$\text{Cos.}\left((\alpha + \beta - \delta') + x\right) = \frac{\text{Cos.}\left((\alpha - \beta) - x\right)}{e^{\text{Tang.}\, x\, (2\alpha - \delta')}}$$

$$\text{Tang.}\, x = \frac{1}{2\alpha - \delta'}\, \text{Log.}\left(\frac{\text{Cos.}\left((\alpha - \beta) - x\right)}{\text{Cos.}\left[(\alpha + \beta - \delta') + x\right]}\right).$$

Fra denne Æqvation kan x ei findes uden ved successive Aproximation, men desuagtet vil den formodentlig blive den beqvemmeste, saasom alle uendelige Rækker, ved hvilke Tang. x let kunde udtrykkes, synes i de fleste Tilfælde at blive stærk divergerende. Den første og meget nære Værdie af x kan findes independent af denne Formel paa følgende Maade: Vi have seet i næstforegaaende §, at naar $x = 0$, da er Forsinkelsesbuen fra $h = 0$ til $h =$

Maxi-

Maximum ligestor med Forsinkelsesbuen fra h Maximum til h igien = 0. Skiøndt dette nu ei har Sted for enhver Værdie af ε, synes det dog meget rimelig at disse tvende Buer kunne ei i vores Tilfælde skielle betydelig fra hinanden, særdeles naar de i sig ere smaa. Jeg skal derfor antage Forsinkelsesbuen fra h = 0 til h Maximum = δ og $\delta' = 2\delta$. Ved da at differentiere Æqvationen for h i §. 2, haves:

$$\text{Sin.}\,(\varepsilon + \beta - \delta) = \frac{\text{Tang.}\,\varepsilon\ \text{Cos.}\,(\alpha - \beta - \varepsilon)}{e^{\text{Tang.}\,\varepsilon\,(\alpha - \delta)}}.$$

Den samme giver for h = 0, naar ω negativ:

$$\text{Cos.}\,(\alpha + \varepsilon + \beta - 2\delta) = \frac{\text{Cos.}\,(\alpha - \beta - \varepsilon)}{e^{\text{Tang.}\,\varepsilon\,(2\alpha - 2\delta)}}.$$

Fra disse tvende Æqvationer haves:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Sin.}\,(\varepsilon + \beta - \delta)^2}{\text{Tang.}\,\varepsilon^2} &= \text{Cos.}\,(\alpha - \beta - \varepsilon)\ \text{Cos.}\,(\alpha + \beta + \varepsilon - 2\delta) \\ &= \tfrac{1}{2}[\text{Cos.}\,2(\alpha - \delta) + \text{Cos.}\,2(\varepsilon + \beta - \delta)] \\ &= \tfrac{1}{2}[1 + \text{Cos.}\,2(\alpha - \delta)] - \text{Sin.}\,(\varepsilon + \beta - \delta)^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\text{Sin.}\,(\varepsilon + \beta - \delta)}{\text{Sin.}\,\varepsilon} = \text{Cos.}\,(\alpha - \delta), \text{ og derfra}$$

$$\text{Tang.}\,\varepsilon = \frac{\text{Sin.}\,(\beta - \delta)}{\text{Cos.}\,(\alpha - \delta) - \text{Cos.}\,(\beta - \delta)}.$$

ε bestemmes saaledes ved følgende tvende Æqvationer:

$$\left.\begin{aligned} \text{Tang.}\,\varepsilon &= \frac{\text{Sin.}\,(\delta - \beta)}{\text{Cos.}\,(\delta - \beta) - \text{Cos.}\,(\alpha - \delta)} \\ \text{Tang.}\,\varepsilon &= \frac{1}{2(\alpha - \delta)}\,\text{Log.}\left[\frac{\text{Cos.}\,((\alpha - \beta) - \varepsilon)}{\text{Cos.}\,(\alpha + \beta - 2\delta + \varepsilon)}\right] \end{aligned}\right\} \text{hvor } \delta \text{ er Halvdelen af den observerte Forsinkelsesbue.}$$

Den sidste af disse Æqvationer fyldestgiort giver den sande Værdie af ε og Tang. ε.

§. 5.

§. 5.

Naar α er liden, kan man og bruge følgende Fremgangsmaade. Hovedformelen (§. 2) var

$$\frac{Nh\,\mathrm{Cos.}\,\beta}{m\,{}'r^3\,\mathrm{Cos.}\,\varepsilon} = \mathrm{Cos.}\,(\omega-\varepsilon-\beta) - \mathrm{Cos.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta)\,.\,e^{-A'(\alpha-\omega)}$$
$$= \mathrm{Cos.}\,(\omega-\varepsilon-\beta) - \mathrm{Cos.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta)$$
$$\times\; e^{-A'((\alpha-\varepsilon-\beta)-(\omega-\varepsilon-\beta))}.$$

Nu er $e^{-A'((\alpha-\varepsilon-\beta)-(\omega-\varepsilon-\beta))} = e^{-A'(\mathrm{Sin.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta)-\mathrm{Sin.}\,(\omega-\varepsilon-\beta))}$

$\times\; e^{-A'\left(\frac{\mathrm{Sin.}\,(\alpha-\beta-\varepsilon)^3-\mathrm{Sin.}\,(\omega-\varepsilon-\beta)^3}{6}\right)} \times$ ꝛc.

Af denne Række tages kun det første Led, da de følgende maae skielle lidet fra 1.

$$e^{-A'(\mathrm{Sin.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta)-\mathrm{Sin.}\,(\omega-\varepsilon-\beta))} = 1-\left[A'(\mathrm{Sin.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta)-\mathrm{Sin.}\,(\omega-\varepsilon-\beta))\right.$$
$$\left. + \frac{{}'A^2}{2} \times \text{ꝛc.}\right]$$

Tages nu af denne kuns de tvende første Lede, hvilket saa meget bedre gaaer an, som dette formindsker $e^{-A'(\alpha-\omega)}$, da derimod forrige Bortkastning formerede samme, saa haves:

$$\frac{Nh\,\mathrm{Cos.}\,\beta}{m\,{}'r^3\,\mathrm{Cos.}\,\varepsilon} = \mathrm{Cos.}\,(\omega-\varepsilon-\beta) - \mathrm{Cos.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta) + A'\,\mathrm{Cos.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta)$$
$$\times\,[\mathrm{Sin.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta) - \mathrm{Sin.}\,(\omega-\varepsilon-\beta)].$$

Lad $\mathrm{Cos.}\,(\alpha-\varepsilon-\beta)\,\mathrm{Tang.}\,\varepsilon$ være $= \mathrm{Tang.}\,\varepsilon'$, saa faaes

$$\frac{Nh\,\mathrm{Cos.}\,\beta\,\mathrm{Cos.}\,\varepsilon'}{m\,{}'r^3\,\mathrm{Cos.}\,\varepsilon} = \mathrm{Cos.}\,(\omega+\varepsilon'-(\beta+\varepsilon)) - \mathrm{Cos.}\,(\alpha+\varepsilon'-(\beta+\varepsilon)).$$

Denne Æqvation bliver saaledes noget nær den simpleste muelig, og giælder egentlig kuns for smaa Værdier af α. Vi gaae til Slutningerne fra samme.

§. 6.

§. 6.

h vil blive Maximum naar $\omega = \beta + \varepsilon - \varepsilon'$; for negativ ω vil derimod h blive o naar $\omega + \beta + \varepsilon - \varepsilon' = \alpha + \varepsilon' - \beta - \varepsilon$;

altsaa naar $\omega = \alpha - 2(\beta + \varepsilon - \varepsilon')$.

Hele Forsinkningsbuen er altsaa her det Dobbelte af Forsinkningsbuen til h Maximum. Denne Egenskab har derfor fornemmelig Sted for smaa Opløftningsbuer. Det er klart Instrumentet giver Værdien for $2(\beta + \varepsilon - \varepsilon')$, og da β maae forher være bekiendt, haves Værdien af $\varepsilon - \varepsilon'$. Som nu videre haves $\frac{\text{Tang. } \varepsilon'}{\text{Tang. } \varepsilon} = \text{Cof.}\,(\alpha - \varepsilon - \beta)$, saa kan ε fra disse tvende Data findes.

I Hensigt til Oscillationstiden, vil, som let sees, den i §. 3 fundne Æqvation endnu giælde, naar blot enkelte Constanter forandres. Er t Tiden af en heel Oscillation, haves altsaa:

$$t = \left(\frac{\text{N Cof. } \beta \text{ Cof. } \varepsilon'}{\text{mpr' Cof. } \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \pi \left[1 + \frac{1^2}{2^2} \text{Sin. } \tfrac{1}{2}(\alpha - (\beta + \varepsilon - \varepsilon'))^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \text{Sin. } \tfrac{1}{2}(\alpha - (\beta + \varepsilon - \varepsilon'))^4 + \text{ꝛc.}\right].$$

Sætter man β er i denne $= 0$, sammenligner derpaa med den analoge Æqvation §. 3, og antager saavel de drivende Kræfter som og Forsinkelsesbuerne β og $(\varepsilon - \varepsilon')$ ligestore, saa vil det klart sees at Kræfterne, der afhænge af Qvadraten af Hastigheden, ei som hine tendere til at forkorte Oscillationstiden, men tvertimod snarere forlænge den; thi da ε' er mindre end ε, er $\frac{\text{Cof. } \varepsilon'}{\text{Cof. } \varepsilon}$ altid større end 1, da derimod i hiin Udtryk Cof. β eller Cof. $(\varepsilon - \varepsilon')$ er stedse mindre end 1.

§. 7.

Æqvationen i §. 2 samt de i §. 4, 5, 6 derfra udledte kunne ligefrem anvendes til et Skibs Svingninger, disse skee om en Tyngdeaxel eller om enhver

hver anden Axel. Man behøver blot at erindre, den almindelige Værdie for N er $\frac{\int mR^2}{\int m}$ taget i Hensigt til Axlen hvorom Svinget skeer. Men det er høist rimelig at Vandets og Luftens Modstand mod et Skibs Svingninger dependere ei alene af Qvadraten af Svingningshastigheden, men og af denne enkelt. En almindeligere Theorie vil altsaa formodentlig udkræves. Dette være som det vil, saa maae det første Reqvisitum være at de ungefære Værdier af Svingningstider og Buer, af Tyngselspunctets Situation, af de modstaaende Kræfters Hovedvirkninger og Egenskaber o. s. v. erholdes. Uden disse Data vil en brugbar Theorie være høist vanskelig, om ei umuelig, og dertil er det at de foreslagne Instrumenter skulle bidrage, dersom den med samme intenderede Hensigt er nogenledes opnaaet.

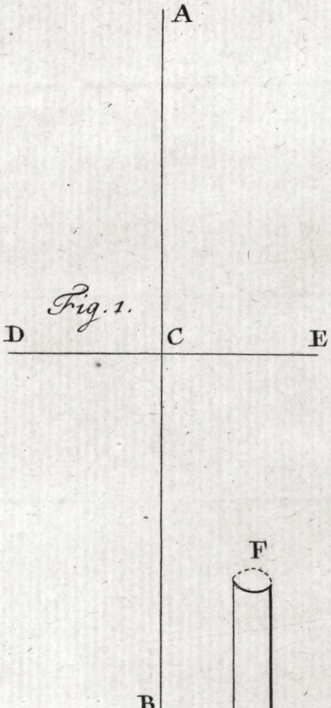


Fig. 1.

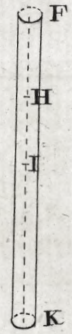
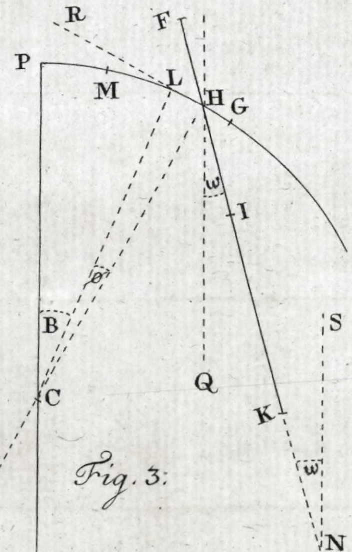


Fig. 2.



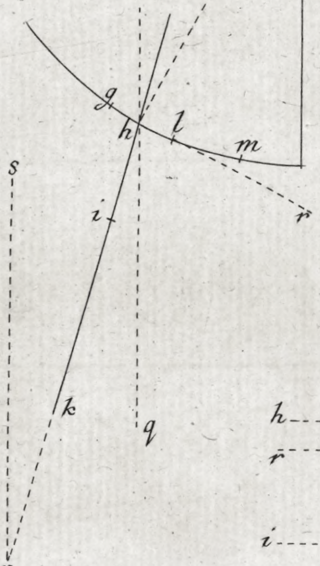


Fig. 3.

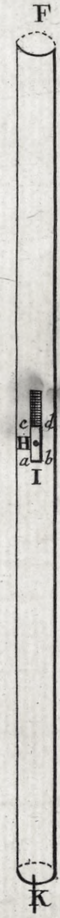


Fig. 4.

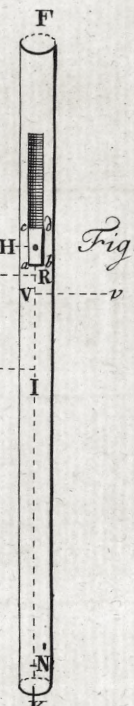


Fig. 5.

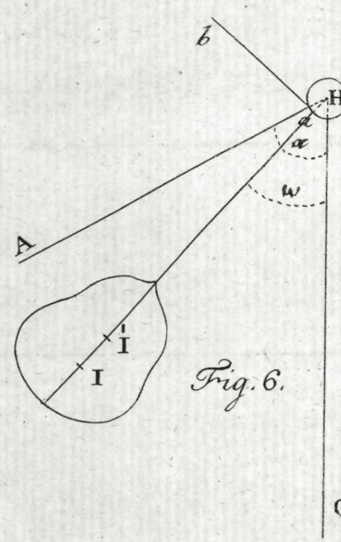


Fig. 6.